Probabilité Et Statistiques - Fonctions Génératrices

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Définition

$$\boxed{G_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right]}$$

Propriété importante

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}}$$

Fonctions génératrices des lois usuelles

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(p) \implies G_X(t) = (1-p) + pt}$$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p) \implies G_X(t) = (1-p+pt)^n}$$

$$\boxed{X \sim \mathcal{G}(p) \implies G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$$

$$\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

Uniforme

Triangulaire

Benford

logarithmique

Calculs sur les fonctions génératrices

Fonction génératrice de la somme

Sous réserve d'indépendance :

$$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}$$

$$\boxed{G_X^{(r)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1)...(X-r+1)]}$$

En particulier, avec $r = 1$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)}$$

Somme aléatoire de variables aléatoires

Soit T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes.

$$\boxed{S(\omega) = \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega)}$$

Identité de Wald

Sous réserve d'indépendance :

Si X_1 et T admettent une espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)}$$

Si X_1 et T admettent un moment d'ordre 2,

$$\boxed{\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}(T)\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2\ \mathrm{Var}(T)}$$